注意事项：
1.答题前，考生务必将密封线内的项目填写清楚。
2.必须使用黑色签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3.请将选择题答案填入试卷**侧边答题栏**中。

考号________ 姓名________ 班级________ 学校________

题 答 要 不 内 线 封 密

2023～2024 学年初高中衔接测试(一)

编审:《当代中学生报》数学研究中心

说明:1. 考试范围:初高中衔接内容.

2. 考试时间 120 分钟,满分 150 分.

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 下面几何体的截面一定是圆面的是

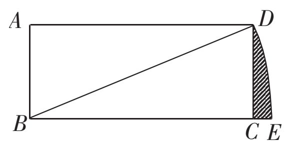
A. 圆锥　B. 球　C. 圆柱　D. 棱柱

2. 已知 a,b,c 是某三角形的三条边,且方程 $x^2-2cx+a^2+b^2=0$ 有两个相等的实数根,则该三角形是

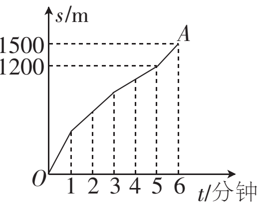
A. 直角三角形　B. 锐角三角形　C. 钝角三角形　D. 等腰三角形

3. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$CD=1$,$\angle DBC=30°$,若将 BD 绕点 B 旋转后,点 D 落在 BC 延长线上的点 E 处,点 D 经过的路径为 $\overset{\frown}{DE}$,则图中阴影部分的面积是

A. $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$　B. $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}$　D. $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$



第 3 题图



第 4 题图

4. 某中学每年都要举行秋季运动会,为了进一步科学地指导学生提高运动成绩,某体育老师在学校的秋季运动会上根据一名同学 1500 m 跑的测试情况绘成上图. 图中 OA 是一条折线段,图形反映的是这名同学跑步的时间与距离的关系,由图可知下列说法错误的是

A. 这名同学跑完 1500 m 用了 6 分钟,最后一分钟跑了 300 m

B. 这名同学的跑步速度越来越快

C. 这名同学第 3 到第 5 分钟的跑步速度最慢

D. 这名同学第 2、第 3 分钟的跑步速度是一样的

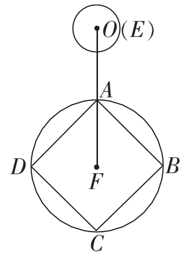
5. 若等腰直角三角形的腰长为 $\sqrt{2}$,则该三角形的重心到斜边的距离为

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{1}{3}$

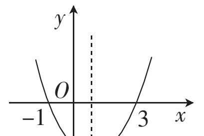
6. 秦兵马俑被誉为“世界第八大奇迹”,兵马俑的眼睛到下巴的距离与头顶到下巴的距离之比约为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,下列估算正确的是

A. $0<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{2}{5}$　B. $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$　C. $\frac{2}{5}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{1}{2}$　D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}>1$


第 6 题图



第 7 题图



第 8 题图

7. 如图,边长为 4 cm 的正方形 $ABCD$,点 F 为正方形的中心,点 E 在 FA 的延长线上,$EA=4$ cm. ⊙O 的半径为 1 cm,圆心 O 在线段 EF 上从点 E 出发向点 F 运动,小明发现:当 EO 满足①$3<EO<5$;②$3\leqslant EO\leqslant 5$;③$EO=4+\sqrt{2}$;④$EO=4+3\sqrt{2}$ 时,⊙O 与正方形 $ABCD$ 的边只有两个公共点. 你认为小明探究结论正确的是

A. ①③　B. ②③　C. ②④　D. ①③④

8. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示. 在下列说法中:①$ac<0$;②方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 $x_1=-1$,$x_2=3$;③$a+b+c>0$;④当 $x\in[1,+\infty)$ 时,y 是增函数. 正确的说法有

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

9. 对于实数 a,b,c,下列说法正确的是

A. 若 $a=b$,则 $a+c=b+c$　B. 若 $a+c=b+c$,则 $a=b$

C. 若 $a=b$,则 $ac=bc$　D. 若 $ac=bc$,则 $a=b$

10. 某院校教师情况如下表所示.

类别 / 年度	老年		中年		青年	
	男	女	男	女	男	女
2020	120	60	240	120	100	40
2021	210	40	320	200	200	120
2022	300	150	400	270	320	280

关于 2020 年、2021 年、2022 年这三年该院校的教师情况,下面说法正确的是

A. 2021 年的男教师最多

B. 该校教师最多的是 2022 年

C. 2021 年中年男教师比 2020 年中年男教师多 80 人

D. 2020 年到 2022 年,该校青年年龄段的男教师人数增长率为 220%

11. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+kx+4k^2-3=0$ 的两个实数根分别是 x_1,x_2,且满足 $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$,则 k 的值不可能为

A. $-\frac{3}{4}$　B. -1　C. $\frac{3}{4}$　D. 1

12. 对于反比例函数 $y=\frac{k^2+k+1}{x}$(k 为常数),下列说法正确的是

A. 函数的图象位于第一、三象限

B. 函数值 y 随 x 的增大而减小

C. 若 $A(-1,y_1)$,$B(2,y_2)$,$C(0.5,y_3)$是图象上的三个点,则 $y_1<y_3<y_2$

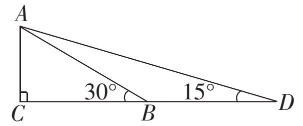
D. 若 P 为图象上任一点,过 P 作 $PQ\perp y$ 轴于点 Q,则△OPQ(O 为坐标原点)的面积是定值

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 已知关于 x 的方程 $x^2-4x+c=0$ 的两根分别是 x_1,x_2,且满足 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=6$,则实数 $c=$________.

14. 已知 $a+b+c=abc$,请写出满足等式成立的一组 a,b,c 的值:________.

15. 构建几何图形解决代数问题是数形结合思想的重要应用. 在计算 $\tan 15°$ 时,如图,在 Rt△ACB 中,$\angle C=90°$,$\angle ABC=30°$,延长 CB,使 $BD=AB$,连接 AD,得$\angle D=15°$,所以 $\tan 15°=\frac{AC}{CD}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$. 类比这种方法,计算 $\tan 22.5°$ 的值为________.



16. 已知方程 $x^2-4x+a=0$ 的两根都在区间$(1,+\infty)$内,则实数 a 的取值范围是________.

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

解方程组 $\begin{cases}x^2-y^2=5(x+y)①\\x^2+xy+y^2=43②\end{cases}$.

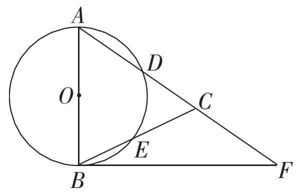
题序	答案
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

18.(本小题满分 12 分)

如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,以 AB 为直径的$\odot O$分别交AC,BC于点D,E,点F在AC的延长线上,且$\angle CBF=\frac{1}{2}\angle CAB$.

(1)求证:直线BF是$\odot O$的切线.

(2)若$AB=5$,$\sin\angle CBF=\frac{\sqrt{5}}{5}$,求$BC$和$BF$的长.



19.(本小题满分 12 分)

粒子加速器是当今高能物理学中研究有关宇宙的基本问题的重要工具.图 1、图 2 是我国某环形粒子加速器的实景图和构造原理图,图 3 是粒子加速器的俯视示意图,其中粒子真空室可看作圆O,粒子在A点注入,经过优弧$\overset{\frown}{AB}$后,在B点引出,粒子注入和引出路径都与圆O相切,C,D是两个加速电极,粒子在经过$\overset{\frown}{CD}$时被加速.已知$AB=16$ km,粒子注入路径与AB的夹角$\alpha=53^\circ$,$\overset{\frown}{CD}$所对的圆心角是90°.

(1)求圆O的直径;

(2)比较$\overset{\frown}{CD}$与AB的长度,哪个更长?(相关数据:$\tan 37^\circ\approx\frac{3}{4}$)

图 1

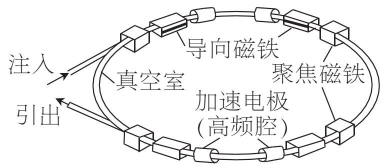


图 2

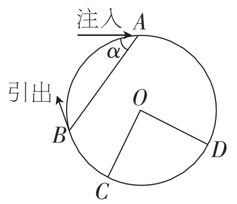


图 3

20.(本小题满分 12 分)

为庆祝中国共产党建党 100 周年,某校加强了学生对党史知识的学习,并组织学生参加《党史知识》测试(满分 100 分).为了解学生对党史知识的掌握程度,从七、八年级中各随机抽取 10 名学生的测试成绩进行统计、分析,过程如下:

收集数据:

七年级:86,88,95,90,100,95,95,99,93,100.

八年级:100,98,98,89,87,98,95,90,90,89.

整理数据:

成绩 x/分 年级	$85<x\leqslant 90$	$90<x\leqslant 95$	$95<x\leqslant 100$
七年级	3	4	3
八年级	5	a	b

分析数据:

统计量 年级	平均数	中位数	众数
七年级	94.1	95	d
八年级	93.4	c	98

应用数据:

(1)填空:$a=$______,$b=$______,$c=$______,$d=$______.

(2)若八年级共有 200 人参与答卷,请估计八年级测试成绩大于 95 分的人数.

(3)从测试成绩优秀的学生中选出 5 名语言表达能力较强的学生,其中八年级 3 名,七年级 2 名.现从这 5 名学生中随机抽取 2 名到当地社区担任党史宣讲员.请用画树状图或列表的方法,求恰好抽到同年级学生的概率.

21.(本小题满分 12 分)

如果关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有两个实数根,且其中一个根比另一个根大 1,那么称这样的方程为"邻根方程".例如,一元二次方程$x^2+x=0$的两个根是$x_1=0$,$x_2=-1$,则方程$x^2+x=0$是"邻根方程".

(1)通过计算,判断下列方程是否是"邻根方程".

①$x^2-x-6=0$;②$2x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

(2)已知关于x的方程$x^2-(m-1)x-m=0$(m是实数)是"邻根方程",求m的值.

(3)若关于x的方程$ax^2+bx+1=0$(a,b是实数,$a>0$)是"邻根方程",令$t=12a-b^2$,试求t的最大值.

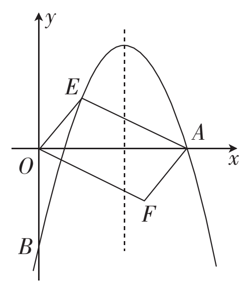
22.(本小题满分 12 分)

如图,已知对称轴为直线$x=\frac{7}{2}$的抛物线经过点$A(6,0)$和$B(0,-4)$.

(1)求抛物线的解析式及顶点坐标;

(2)设点$E(x,y)$是抛物线上一动点,且位于第一象限,四边形$OEAF$是以OA为对角线的平行四边形,求平行四边形$OEAF$的面积S与x之间的函数关系式;

(3)当(2)中的平行四边形$OEAF$的面积为 24 时,请判断平行四边形$OEAF$是否为菱形.



2023～2024 学年初高中衔接测试(二)

编审:《当代中学生报》数学研究中心

说明:1. 考试范围:高一必修内容.

2. 考试时间 120 分钟,满分 150 分.

注意事项:
1. 答题前,考生务必将密封线内的项目填写清楚。
2. 必须使用黑色签字笔书写,字体工整、笔迹清晰。
3. 请将选择题答案填入试卷侧边答题栏中。

考号________ 姓名________ 班级________ 学校________

密 封 线 内 不 要 答 题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{-3,2,1\}$,$B=\{-4,-3,1\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{-3,2\}$　　B. $\{-4,-3\}$　　C. $\{-3,1\}$　　D. $\{-4,-3,1,2\}$

2. 下列四个函数中,与函数 $y=x$ 是同一个函数的是

A. $y=\dfrac{x^2}{x}$　　B. $y=(\sqrt{x})^2$　　C. $y=\sqrt[3]{x^3}$　　D. $y=\sqrt{x^2}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+3, x\leqslant 1\\ x-4, x>1\end{cases}$,则 $f(0)=$

A. -1　　B. -2　　C. 3　　D. -4

4. 设过长方体同一个顶点的三个面的对角线长分别是 a,b,c,那么这个长方体的对角线长是

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$　　B. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$　　C. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$　　D. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$

5. 已知集合 $A=\{a-2,a^2+4a,12\}$,且 $-3\in A$,则 a 等于

A. -3 或 -1　　B. -1　　C. 3　　D. -3

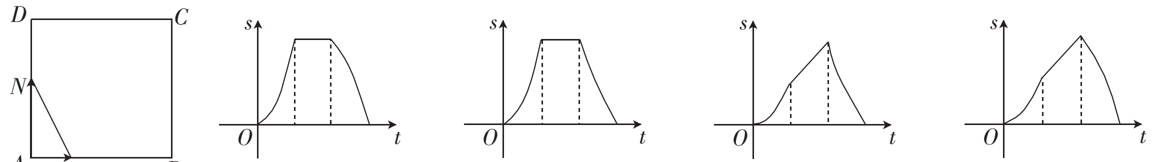
6. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\angle B=45°$,$\angle C=30°$,$AC=2$,则 AB 等于

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

7. 若角 $5\pi-\alpha$ 的终边与单位圆的交点坐标是 $(x,-\dfrac{4}{5})$,则 $\cos(\alpha-2023\pi)$ 等于

A. $\pm\dfrac{4}{5}$　　B. $\pm\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $-\dfrac{3}{5}$

8. 如图,边长为 1 的正方形 $ABCD$,点 M 从点 A 出发以每秒 1 个单位长度的速度向点 B 运动,点 N 从点 A 出发以每秒 3 个单位长度的速度沿 $A\to D\to C\to B$ 的路径向点 B 运动,当一个点到达点 B 时,另一个点也随之停止运动. 设 $\triangle AMN$ 的面积为 s,运动时间为 t 秒,则能大致反映 s 与 t 的函数关系的图象是



A.　　B.　　C.　　D.

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

9. 下列函数中,在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是

A. $y=x$　　B. $y=\dfrac{1}{x}$

C. $y=-x^2$　　D. $y=-|x|$

10. 下列各组函数是同一函数的是

A. $f(x)=x^2+4x+4$ 和 $g(m)=(m+2)^2$

B. $f(x)=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}$ 和 $g(x)=\sqrt{x^2-9}$

C. $f(x)=\sqrt{-5x^3}$ 和 $g(x)=x\sqrt{-5x}$

D. $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ 和 $g(x)=x^2-1$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\leqslant 0\\ \sqrt{x}+8, x>0\end{cases}$,若 $f(a)=10$,则实数 a 的值可以是

A. 3　　B. -3　　C. 4　　D. -4

12. 下列结论正确的是

A. $-\dfrac{7\pi}{6}$ 是第三象限角

B. 若 $\tan\alpha=2$,则 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3$

C. 若圆心角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的扇形的弧长为 π,则该扇形面积为 $\dfrac{3\pi}{2}$

D. 终边经过点 $(m,m)(m>0)$ 的角的集合是 $\{\alpha|\alpha=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 不等式 $\dfrac{2x+1}{x-2}<0$ 的解集为____________. (写成区间形式)

14. 用一个平面去截球所得截面的面积为 $3\pi\ \mathrm{cm}^2$,已知球心到该截面的距离为 1 cm,则该球的体积是__________cm^3.

15. 观察等式:$2+2^2=2^3-2$,$2+2^2+2^3=2^4-2$,$2+2^2+2^3+2^4=2^5-2$,…. 已知按一定规律排列的一组数:2^{100},2^{101},2^{102},…,2^{199},若 $2^{100}=m$,则这组数的和是________. (用含 m 的代数式表示)

16. 已知函数 $f(x)=x^2-2x-3$,$x\in[-2,a]$ 的值域是 $[-4,5]$,则实数 a 的取值范围是__________.

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

计算:(1) $\sqrt{9}+(\sqrt[3]{9}-2)^0-|-3|-(\dfrac{1}{3})^{-1}$;

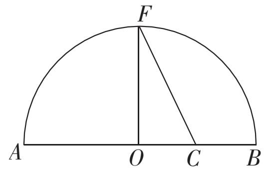
(2) $\dfrac{\cos(-585°)+\sin 300°}{\tan 225°+\cos(-240°)}$.

18. (本小题满分 12 分)

《几何原本》卷二的几何代数法(以几何方法研究代数问题)成了后世西方数学家处理问题的重要依据,利用这一方法,很多代数的公理或定理都能够通过图形实现证明. 现有如图所示的图形,点 F 在半圆 O 上,且 $OF\perp AB$,点 C 在线段 OB 上. 设 $AC=a$,$BC=b$,结合该图形解答以下问题.

(1) 用 a,b 表示 OF,OC,FC.

(2) 根据 OF 与 FC 的大小关系,结合(1)的结论可得到什么不等式? 并证明 $a=b$ 是该不等式取等号的充要条件.



题序	答案
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

19.(本小题满分 12 分)

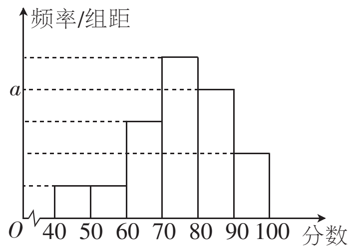
已知函数 $f(x)=x^2+(a+b)x+a$.

(1)若关于 x 的不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x|2<x<3\}$,求实数 a,b 的值;

(2)当 $b=1$ 时,解关于 x 的不等式 $f(x)>0$.

20.(本小题满分 12 分)

从某校参加数学竞赛的试卷中抽取一个样本,分析竞赛的成绩分布情况,将样本分成 6 组,得到频率分布直方图,如图,从左到右各小组的小长方形的高的比为 1∶1∶3∶5∶4∶2,最右边的一组的频数是 8.



(1)求样本的容量 N 及图中 a 的值;

(2)估计这次数学竞赛成绩的众数、中位数、平均数.

21.(本小题满分 12 分)

在初中阶段的函数学习中,我们经历了“确定函数的表达式——利用函数图象研究其性质”,函数图象在探索函数的性质中有非常重要的作用.下面我们对经过点$(-4,-1)$的函数 $y_1=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & x\leqslant -1\\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{2}, & x>-1\end{cases}$ 的图象和性质展开研究.探究过程如下,请补全过程:

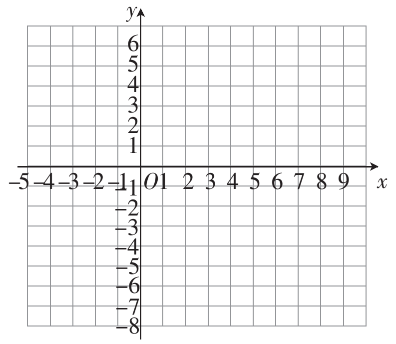
x	…	-4	-2	-1	0	1	7	9	…
y_1	…	-1	-2	m	-3.5	-3	0	n	…

(1)①根据解析式列表,可求得 $m=$__________,$n=$__________;

②在给出的平面直角坐标系中描点,并画出函数的大致图象.

(2)写出这个函数的一条性质:______________________________.

(3)已知函数 $y_2=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$,结合两个函数的图象,请直接写出当 $y_1\geqslant y_2$ 时,自变量 x 的取值范围.



22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2-2(k+1)x+3$.

(1)若函数 $f(x)$在区间$[-1,3]$上具有单调性,求实数 k 的取值范围;

(2)求函数 $f(x)$在区间$[-2,2]$上的最小值.